



TITLE:

流体運動中の化学反応の数理の構築に向けて(I): 位相カオスによる効率的粒子混合: A global and uniform chaotic advection using topological chaos (非線形現象の実験解析と数理解析)

AUTHOR(S):

金, 英子; 坂上, 貴之; 森, 義仁

---

CITATION:

金, 英子 ...[et al]. 流体運動中の化学反応の数理の構築に向けて(I): 位相カオスによる効率的粒子混合: A global and uniform chaotic advection using topological chaos (非線形現象の実験解析と数理解析). 数理解析研究所講究録 2005, 1453: 44-58

ISSUE DATE:

2005-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47787>

RIGHT:

# 流体運動中の化学反応の数理の構築に向けて I ～位相カオスによる効率的粒子混合～ A global and uniform chaotic advection using topological chaos

金 英子 (Eiko Kin) 京都大学 (Kyoto University),

E-mail: kin@math.kyoto-u.ac.jp,

坂上 貴之 (Takashi Sakajo) 北海道大学 (Hokkaido University),

E-mail: sakajo@math.sci.hokudai.ac.jp,

森 義仁 (Yoshihito Mori) お茶の水女子大学 (Ochanomizu University),

E-mail: ymori@cc.ocha.ac.jp.

## 1 研究の動機

反応拡散系理論は多くの非線形現象, 特に化学反応におけるパターン形成やリズムの生成等の現象の数理的説明に成功している. その応用範囲は現在も広がっており, 多様な研究成果や研究手法の蓄積がある. 一方, 流体運動はもう一つの代表的な非線形現象であり, 古くから理学・工学の各分野において活発に研究され, こちらも様々な成果が知られている.

工学や産業分野において重要ないくつかの化学反応現象は, 反応拡散系の問題として扱われ, その素過程が明らかになっている. しかし, 実際の反応は水などの溶媒中で起こることが多いので, こうした現象のさらなる理解を進めるためには, 攪拌や対流といった溶媒流体の引き起こす大域的な運動が, これらの化学反応にどのように影響するかを調べるのが重要になる. 双方の理論の成果が蓄積された現在, 反応拡散系理論と流体理論の融合によるこうした現象の研究は今後の応用数学の重要な課題の一つと考えられ, 実際に多くの応用分野 (内燃機関の研究における燃焼流体などは非常に活発な分野の一つである) でそれぞれの問題意識に応じて, 反応拡散方程式と流体方程式のカップリングなどにより数値的・数理的研究が行われている.

さて, 二つの理論の融合による研究の重要性は理解できるが, 応用を念頭においた個別論としての研究ではなく, こうした現象の数理の基礎研究として実際にどの

ような問題を扱うべきかは定かでなく、数学の問題としての設定が曖昧であるように思われる。よく取り扱われる例としては、対流などの効果が化学反応に及ぼす影響などもあるが、ここではそれとは全く別の方向からの試みとして以下のような問題を考えたい。

すなわち、多様なパターンを形成する化学反応の問題を反応拡散方程式として扱う際には、溶媒などの流体層が均一に攪拌されていることが仮定されており、流体の効果は拡散項として系に取り込まれている。しかし、流体粒子の攪拌については、近年流体力学でも重要な分野であるカオス的混合 (Chaotic advection) の研究が進み、それによれば流体粒子のカオス的攪拌は一般に不均一であり、かつ粒子はある種の力学構造を持って拡散されていることが明らかになっている。

このような状況を考えると、十分な攪拌から流体粒子の拡散が導かれるかどうかは明らかでない。すなわち、このような系において流体と反応を同時に考えることは、複雑な攪拌の作る流れの力学的構造とその上での化学反応を取り上げることであり、拡散効果というものがどれほど重要なのかを検討する必要がある。そこで本稿では、流体運動中の化学反応理論の構築に向けて、反応粒子の拡散効果ではなく、カオス的混合による攪拌がある状況下で反応拡散的な化学反応が起こるとどのようなパターン形成が見られるかを実験と数理の双方から迫る試みについて報告する。

一般的にカオス的粒子混合で粒子を混ぜると、粒子混合の様子は局所的でありかつ非均一であることが多い。したがって、粒子混合と粒子拡散の影響を比べるためには、粒子混合場が均一で大域的だが、単なる拡散ではなくて流れの構造がそこに埋め込まれているような系を構成しなければならない。そこで第一部では位相的カオスの理論を援用した、そのような系の理論的構築を行う。続いて第二部では、この理論を実現する系についての簡単な実験結果と理論・実験分野からの今後の取り組みについてのまとめを行う。

## 2 二次元流体中のカオス的混合について

2次元の非粘性非圧縮流における粒子  $(x, y)$  は、流れ関数とよばれるスカラー関数  $\varphi$  から定義される流れ場により次の方程式に従って時間発展する：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

この方程式はハミルトン力学系を与えており、そのハミルトニアンは流れ関数と一致する。この流れ関数が時間に依存しないとき、系は可積分なので粒子は複雑な運動を示さないが、時間に依存するときは粒子の軌道は複雑になることがある。このように流れを定める速度場は単純であっても粒子が複雑に運動する現象はカオス的輸送[chaotic advection]と呼ばれている。流れ関数が時間に依存する最も単純なものとしては時間周期性を持つ場合が考えられるが、この場合ですらカオ

的輸送が起こることを Aref は非圧縮流体中で渦糸を交互に点滅させる (これを blinking vortex とよぶ) ことによって示した [1, 2]. カオスの輸送が起こる一つのメカニズムとしては, 2 次元微分同相写像における横断的 homoclinic 点の周りの horseshoe によって発生することが知られている.

本研究では, Aref が導入した blinking vortex システムと呼ばれる粒子混合を再考察する [7]. その際に, 渦糸を点滅させる時間や渦糸の強さの正負の選び方が重要であり, 適切な選び方のもとでは均一性の高い粒子混合が実現できることを数値計算とトポロジーの組みひもを用いて説明したい.

### 3 Blinking vortex システムによる粒子混合

今, 十分大きな容器を考え, 非粘性非圧縮の流体が容器全体を満たしているものとする. そこに大きさの無視できる理想的なプロペラ  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ) を用意し, その位置を点  $(x_i, y_i)$  に固定する. ここでは理想的にプロペラが回転すると即座にそこに渦糸が生成されて粒子の攪拌が始まり, 停止すると渦は瞬時に消え粒子の運動は停止するものとする. 各プロペラの位置に発生する渦糸が, 点  $(x, y)$  において生成する速度場  $(u_i(x, y), v_i(x, y))$  は次のように与えられる:

$$u_i(x, y) = -\frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{y - q_i}{(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 + \delta^2}, \quad (1)$$

$$v_i(x, y) = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{x - p_i}{(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 + \delta^2}. \quad (2)$$

ここで  $\Gamma_i$  は渦糸の強さを表し, プロペラが反時計周りに回転するときは正, 時計周りに回転するときは負の値をとる.  $\delta > 0$  は渦糸による流れの渦法による正則化パラメータである. このような正則化された渦糸を vortex blob と呼び, 我々はプロペラを回転させることによって生成される vortex blob を交互に点滅させた時, 粒子がどのように拡散するかについて調べる. なお, 正則化パラメータ  $\delta$  は 0.6 で計算しているが,  $\delta$  を少々変えても上の考察は変わらないことが数値計算によってわかっている [7]. また, この渦法による正則化は粒子の満たす常微分方程式を解く際にプロペラの近傍での特異な挙動を抑えるために導入されたものであるが, 実際にはこの粒子の運動は陽的に二次元の変換として書き下すこともできるので, それによって計算するのであれば必要のないものである. しかし, 渦法による正則化パラメータの効果が微小な粘性の効果としてある種の流体现象の数値計算においては働いているという比較報告 ([10]) もあるので, 本稿ではこの正則化により非粘性流のみならず, 微小な粘性を持つ流体系でも成立することもこの数値計算から見たいと考えている.

Vortex blob を交互に点滅させる具体的な操作について述べる. 2つのプロペラ  $P_1, P_2$  の位置をそれぞれ点  $(-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0)$  に固定し,  $P_1, P_2$  の回転方向を決める. この時, プロペラによって生じる渦糸の強さ  $\Gamma_i$  の正負を決定するが, ここではプロ

ペラが反時計周りに回転するときは  $\Gamma_i = 1$ , 時計周りに回転するときは  $\Gamma_i = -1$  となる場合のみを考える。(実は  $\Gamma_i$  の大きさは後述する回転時間をうまく調節すればこのようにおいても一般性を失わない。) 次の2つのルールを与える (Figure 1 を参照):

ルール 1.  $P_1$  の回転が on のときは  $P_2$  の回転は off にする.  $P_1$  の回転が off のときは  $P_2$  の回転は on にする.

ルール 2. 各プロペラを回転させる時間は

$$T = 2\pi^2 \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right)$$

とする. これは  $P_1$  の回転が on の時, プロペラの回転によって点  $(-1, 0)$  と  $(0, 0)$  がちょうど入れ替わる時間である. 同様に  $P_2$  の回転が on の時は, 点  $(0, 0)$  と  $(1, 0)$  がちょうど入れ替わる.

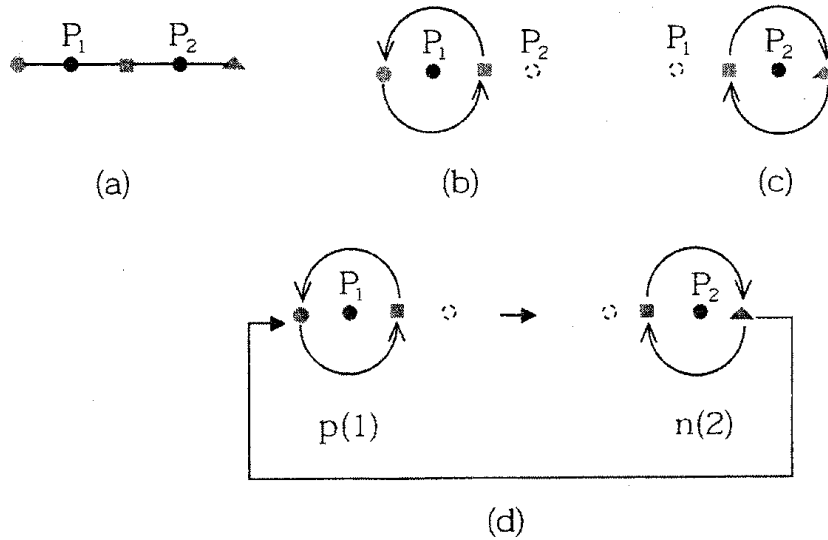


図 1: (a) 渦糸  $P_1, P_2$  と 3 点  $\bigcirc = (-1, 0)$ ,  $\square = (0, 0)$ ,  $\triangle = (1, 0)$  の位置. (b)  $P_1$ : on,  $P_2$ : off の模式図. (c)  $p(1)n(2)$  による渦糸の操作方法の模式図.

以降, プロペラ  $P_i$  が時間  $T$  だけ反時計周りに回転する時 (あるいは時計周りに回転する時), この操作を記号  $p(i)$  (あるいは  $n(i)$ ) で表す. 交互に点滅する vortex blob の誘導する速度場 (1),(2) による粒子の時間発展方程式を導いて, それを数値的に解く. ここで我々が扱う例は  $p(1)n(2)$  (つまり  $P_1$  を時間  $T$  だけ反時計周りに回転させ, 次に  $P_2$  を時間  $T$  だけ時計回りに回転させる, Figure 1 を参照) と  $p(1)p(2)$  である.

まず  $p(1)n(2)$  による渦糸付近の粒子混合について考えよう。Figure 2は、 $p(1)n(2)$  を繰り返したときの、時間  $t = kT$  ( $k = 0, 4, 8, \dots, 32$ ) おきに観察される粒子分布である。粒子の初期分布として、区間  $[-2, 2]$  上に一様に 20000 個の粒子を取っている。図の中の  $\circ$ ,  $\square$ ,  $\triangle$  はそれぞれ  $x$  軸上の点  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  を表しており、2つのプロペラは  $\circ$  と  $\square$  の中点と、 $\square$  と  $\triangle$  の中点にある。初期時刻において  $[-2, 2]$  上に一様に分布している粒子集団は、時間が経過するごとに強い引き延ばしと折り畳みによって筋状の模様を形成し、渦糸付近にマッシュルームのような形をした領域を形成する。この領域の中では粒子は強い引き延ばしを受けるため混合の均一性はかなり高いことが期待できる。なお、粒子の初期分布を変えても類似のマッシュルームの形をした筋模様がいつも形成される。これは渦糸付近の粒子は強い引き延ばしと折り畳みによる影響をうけるため、粒子の初期分布という個性が時間と共に失われると解釈できる。

操作  $p(1)n(2)$  において渦糸から離れた領域における粒子混合について考えよう。Figure 3(左)は、ある 10 点の軌道を長い時間にわたってプロットしたものである。渦糸付近には粒子が複雑に動く領域があり(ここではその領域を  $R$  とよぶ。Figure 3(右) 参照)、 $R$  から出発した点はある時刻までは  $R$  の近くで複雑に動きまわりますが、しばらくすると  $R$  の上の方から飛び出し、大きな円弧上を穏やかに動きながら  $R$  の下の方から再び  $R$  に飛び込む。粒子が円弧上を動くときには、領域の引き延ばしの影響を受けないが一旦  $R$  に入ると強い引き延ばしを受ける。従って渦糸から離れた領域にある粒子もいずれは  $R$  に入り強い引き延ばしを受けることになり、広い領域で粒子はかなり均一に混ざることが期待できる。

次に  $p(1)p(2)$  で実現できる粒子混合について考える。Figure 4は、 $p(1)p(2)$  を繰り返したときの、時間  $t = kT$  ( $k = 0, 4, 8, \dots, 32$ ) おきに観察される粒子分布である。渦糸付近には乱雑に粒子が広がる領域ができるが、 $p(1)n(2)$  でみたような混合の均一さはみられない。Figure 5は、ある 10 点の軌道を長い時間にわたってプロットしたものであるが、渦糸付近を囲む大きな島が見られることに注意したい。この島の上では粒子は規則的に動く。島が存在すると、島を隔てた二つの領域に存在する粒子は決して接近することがなく、広い領域での粒子の均一な混合は期待できないと言える。

以上のことは2つの操作  $p(1)n(2)$  と  $p(1)p(2)$  は、プロペラを回転させるために必要なエネルギーは等価であるにも関わらず粒子混合の様子に大きな差が生まれることを示している。このような差が生まれる理由は、トポロジーの組みひもと関連していることを次に考えたい。

## 4 組みひも

ここでは組みひもの定義を与え、組みひもの分類について紹介する。組みひもについて詳しくは [8]、組みひもの分類については [9] を参照して頂きたい。

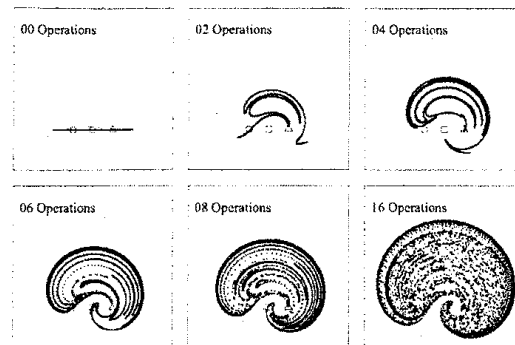


図 2:  $p(1)n(2)$  を繰り返したときに観察される粒子混合の様子. 正則化パラメータ  $\delta$  は 0.6.

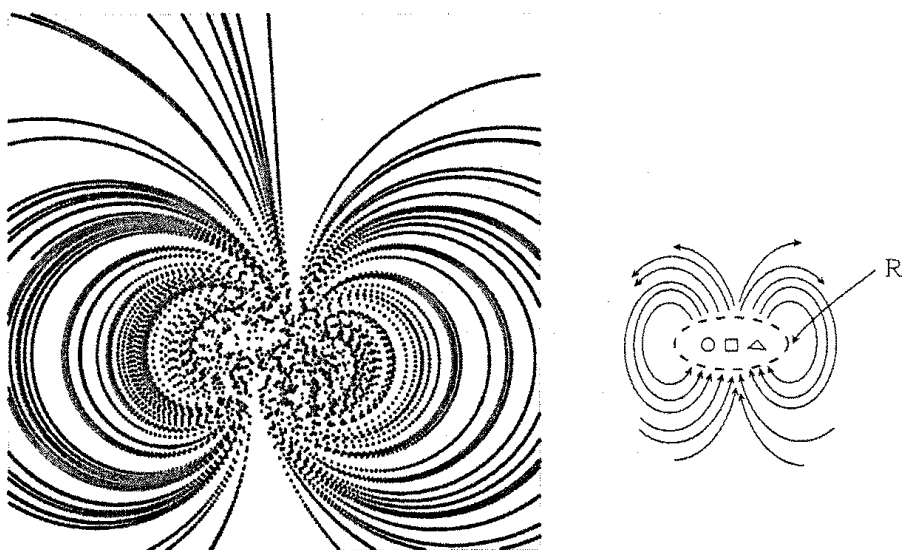


図 3:  $p(1)n(2)$  においてある 10 点の軌道をプロットしたもの. 正則化パラメータ  $\delta$  は 0.6 (左). 操作  $p(1)n(2)$  における粒子が複雑に動く領域  $R$  (右).

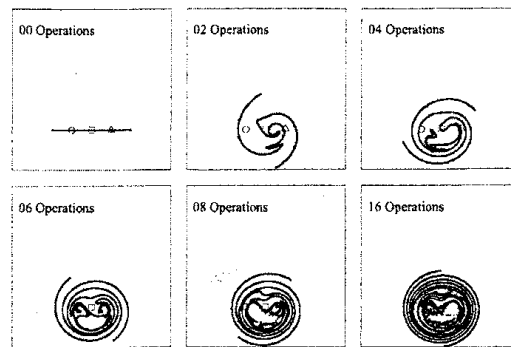


図 4:  $p(1)p(2)$  を繰り返したときに観察される粒子混合の様子. 正則化パラメータ  $\delta$  は 0.6.

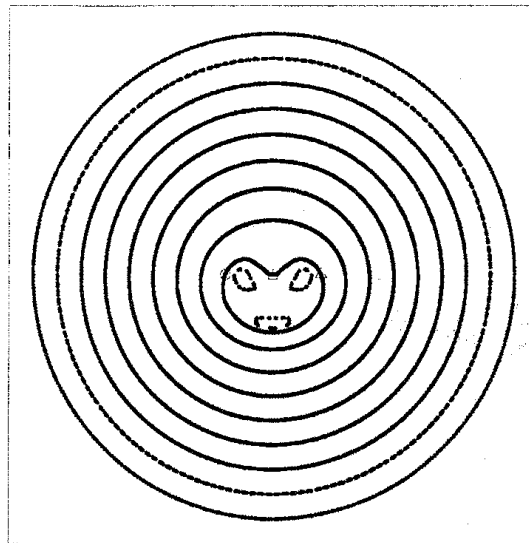


図 5:  $p(1)n(2)$  においてある 10 点の軌道をプロットしたもの. 正則化パラメータ  $\delta$  は 0.6.



Figure 6(左) のように立方体の上の面に点  $P_1, P_2, \dots, P_n$  をとり, 下の面には  $P_1, P_2, \dots, P_n$  の真下にあたる場所に点  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  をとる. 時刻 0 において  $P_1, P_2, \dots, P_n$  を出発した点が上から下に向かって単調に互いに衝突しないで動き回って, 時刻 1 にそれぞれ  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  のいずれかに到達するとする. これらの点の通った道を描くと, 立方体の中には  $n$  本のひもが出来る. これを  $(n-)$  組みひも とよぶ. 2つの組みひもが同じ とは, 組みひもの両端点  $P_1, P_2, \dots, P_n$  と  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  を固定したまま直方体の中でひもを動かすことによって移りあえることとする (Figure 6(右)).

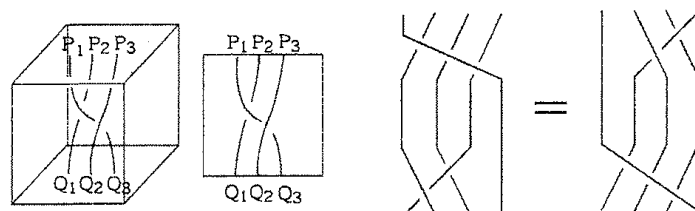


図 6: 組みひも (左), 同じ組みひも (右)

Figure 7(a) のように  $i$  番目の点と  $i+1$  番目の点を入れ替えることによって 2 通りの組みひも,  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}$  が得られる. 任意の組みひもは  $\sigma_i$  や  $\sigma_i^{-1}$  の形をした組みひもをつないだいものと考えることができる. 例えば, Figure 7(b) の組みひもは  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}$  の 3つの組みひもをつないだものである. このとき, この組みひもを  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$  のように表す.

一般に, 与えられた 2つの  $n$ -組みひも  $a, b$  に対して,  $a$  の下に  $b$  をつなぐことによって新しい  $n$ -組みひもが得られるが, この組みひもを積の記号を用いて  $ab$  と表すことにすれば (Figure 7(c)), この積によって,  $n$ -組みひもの同値類の全体は群の構造が入る. ( $\sigma_i$  の逆元は  $\sigma_i^{-1}$  になる.) この群は  $n$ -組みひも群 とよばれる.

$n$ -組みひも  $b, b'$  が共役 とは, ある  $n$ -組みひも  $h$  が存在して  $b = hb'h^{-1}$  を満たすこととする. 明らかに組みひも  $a, b$  が同じであれば, それらは共役である.

組みひもは以下の方法によって, 周期型, 可約型, 擬アノソフ型 のうちのいずれかに分類される.  $m$ -組みひも  $\beta$  が周期型 [periodic] とは,  $\beta$  が

$$(a) (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1})^k \text{ あるいは } (b) (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1}\sigma_1)^k$$

と共役であることとする (ただし  $k$  は整数. Figure 8(a)(b) 参照). 可約型とは, もとの組みひも  $\beta$  をより本数の少ない組みひもに”分解”できる場合をいう. 例えば Figure 8(c) の 5-組みひも  $\sigma_1\sigma_1\sigma_3\sigma_4^{-1}$  には 互いに交わらない円筒  $T, U$  が取れて  $T$  の中では 2-組みひもが,  $U$  の中には 3-組みひもが定義できている. このような状況では, もとの組みひもを, より本数の少ない組みひもに帰着させることができる. 最後に, 組みひも  $\beta$  が擬アノソフ型 [pseudo-Anosov] とは  $\beta$  は

周期型とも既約型とも共役でないこととする。補足であるが、2-組みひもは全て周期型である。擬アノソフ組みひもが出現するのは平面上の組みひもの場合には3-組みひもからである。例えば3-組みひも  $\sigma_1\sigma_2^{-1}$  は擬アノソフである。

周期型と擬アノソフ型の組みひもが持つ性質の著しい違いについて考察する。Figure 9 のように組みひもに対し上端点を結ぶ弧をとり、それらを組みひもに沿って上から下に向けて“流す”。これは時刻 0 における隣り合う粒子を結ぶ弧が時間とともにどのように変化するかを表したものである。時刻 1 に達すると、そこで得られる弧を組みひもの上部に持って行き、また上から下に向けて弧を流す、という操作を行う。このような操作を繰り返し行くと、周期型組みひもの場合には（必要ならば弧の端点を止めながら弧を連続変形すると）ある時刻で初期時刻にとった弧に戻ることがわかる。一方、同じ考察を擬アノソフ型に対して行くと、ある時刻で、操作の繰り返しによって得られる弧が初期時刻にとった弧に戻ることは決して起こらず、弧の長さは時間とともにいくらでも長くなる。

この性質を力学系に応用してみよう。今、円板上の同相写像  $f$  は不変集合  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  を持つとする（即ち、 $f(P) = P$  が成り立つ）。このとき、恒等写像と  $f$  を結ぶ同相写像の連続変形（イソトピー）を取り、この連続変形に従って不変集合が通った道を描くと組みひも  $b_P$  が得られる Figure 10. 組みひも  $b_P$  がどの型に分類されるかに従って、不変集合は 周期型、可約型、擬アノソフ型 などとよぶことにする。もしも不変集合が擬アノソフ型ならば、不変集合を結ぶ弧  $\gamma$  の  $f$  の  $n$  回合成  $f^n$  による像  $f^n(\gamma)$  の長さはいくらでも長くなることになる。このように擬アノソフ型の不変集合が存在すると、その周りでは引き延ばしが強制される。一方、周期型の不変集合には、その存在性が強制する複雑さは存在しない。考えている写像そのものは複雑な写像であるかもしれないが、周期型の不変集合のみから写像の複雑さを引き出すことはできない。

## 5 Thurston-Nielsen 理論とその応用

### 5.1 Thurston-Nielsen 理論

Thurston-Nielsen 理論 [5, 11] は曲面  $\Sigma$  上の同相写像の分類理論である。ここでは分類理論の応用として知られている結果を紹介する。分類理論の入門的な文献として [4] がある。

この論文では簡単のため  $\Sigma$  として、円板  $D$  から有限個の点を除いた穴あき円板を考える。円板上の同相写像  $f$  は擬アノソフ型の不変集合  $P$  を持つとする。このとき、 $D$  から集合  $P$  を除いた穴あき円板  $D \setminus P$  では  $f$  の制限写像  $\hat{f} = f|_{D \setminus P} : D \setminus P \rightarrow D \setminus P$  を考えることができる。 $f : D \rightarrow D$  はいつでも恒等写像  $i : D \rightarrow D$  とイソトピックなので、 $f$  をイソトピー変形によって分類することは意味がない。しかし一般には  $\hat{f} : D \setminus P \rightarrow D \setminus P$  は  $\hat{i} : D \setminus P \rightarrow D \setminus P$  とイソトピックでない。つまり一般には、 $f$  と  $i$  は集合  $P$  を固定したままイソトピー変形できない。

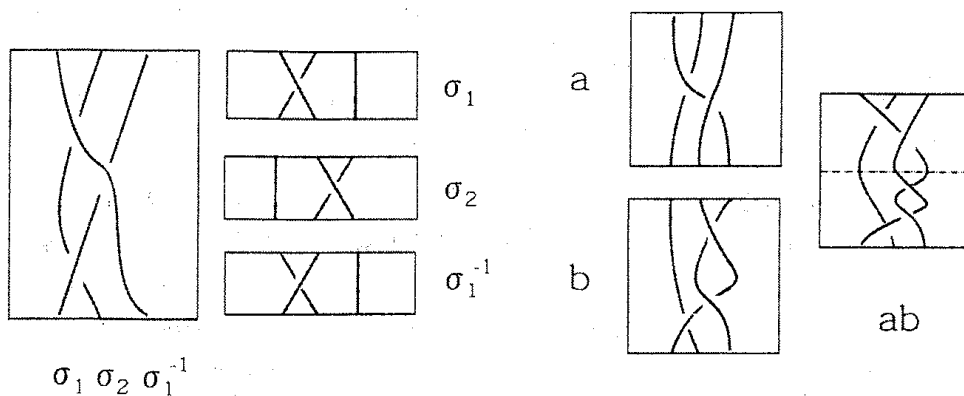


図 7: (a)  $i$  番目と  $i+1$  番目のひもを入れ替えることによって得られる組みひも  $\sigma_i$  と  $\sigma_i^{-1}$ . (b) 組みひも  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}$ . (c) 2 つの組みひもをつなぐことによって群の積構造が入る.

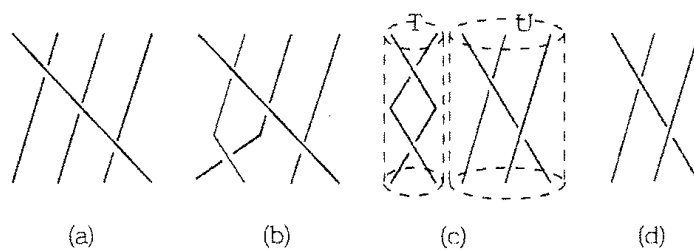


図 8: (a) 周期型, (b) 周期型, (c) 可約型, (d) 擬アノソフ型

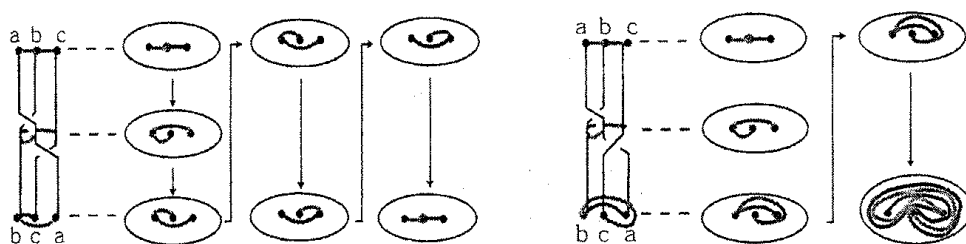


図 9: 周期型 (左); 弧は時刻 3 で初期の位置に戻る. 擬アノソフ型 (右): 弧の長さは時間が経つにつれていくらかでも長くなる.

Thurston, Nielsen はこのような  $\hat{f}$  のイソトピー変形による標準的な分類を与えた. 具体的には,  $\hat{f}$  は 周期写像, 可約写像, 擬アノソフ写像 とよばれる 3 つの標準的な写像のいずれかとイソトピックになる. ここで同相写像  $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  が周期写像であるとは,  $\Phi^n = \underbrace{\Phi \circ \dots \circ \Phi}_n$  が恒等写像となるような  $n \geq 1$  が存在することとする.

同相写像  $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  が可約写像であるとは,  $\Sigma$  上の単純閉曲線の和集合  $\ell = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_s$  (各  $\ell_i$  は  $\Sigma$  上の単純閉曲線) が存在し,  $\Phi(\ell) = \ell$  を満たすこととする. 同相写像  $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$  が擬アノソフ写像であるとは,  $D \setminus P$  上で定義された互いに横断的な (有限個の特異点を持つ) 葉層  $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$  とある定数  $\lambda > 1$  が存在し,  $\Phi(\mathcal{F}^\sigma) = \mathcal{F}^\sigma$  ( $\sigma = s, u$ ) かつ,  $\mathcal{F}^u$  に沿った弧の長さは  $\Phi$  で写すと  $\lambda > 1$  倍の長さになり,  $\mathcal{F}^s$  に沿った弧の長さは  $\Phi$  で写すと  $\frac{1}{\lambda}$  倍の長さになるという性質を満たす写像である. 擬アノソフ写像は, トーラス上のアノソフ写像の一般化である. 擬アノソフ写像に対しては, 周期点が  $\Sigma$  上で稠密であることや, 位相的エントロピー (定義については例えば [12] を参照) が  $\log \lambda$  ( $\lambda$  は擬アノソフ写像の expansion constant) で与えられることが知られている.

組みひも群と同相写像の写像類群との関係をよく調べると,  $f$  の不変集合から定まる組みひも  $b_P$  の型と  $\hat{f}$  と連続変形できる標準的な写像の型には対応があることがわかる. 例えば

$b_P$  が擬アノソフ型である  $\leftrightarrow \hat{f}$  は擬アノソフ写像に連続変形できる

等が成り立つ. こうして組みひも  $b_P$  によって  $\hat{f}$  と連続変形できる標準的な写像が決まることから, その標準的な写像を  $\Phi_{b_P}$  と書くことにする. Section 4 の後半では, 擬アノソフ型の組みひもが強制する複雑さについて触れた. Handel は, 擬アノソフ型の不変集合が存在すると, ある不変集合が存在し, その不変集合への制限写像は擬アノソフ写像と半共役になることを示した:

定理 [6].  $f$  を円板上の (擬アノソフ写像とは限らない) 同相写像とし,  $P$  を擬アノソフ型の不変集合とする. このとき,  $f$  のある閉不変集合  $Y \subset D$  と全射, 連続写像  $g: Y \rightarrow D$  が存在し,  $g \circ f|_Y = \Phi_{b_P} \circ g$  が成立する. ここで  $\Phi_{b_P}$  は擬アノソフ写像である.

$g$  は多対 1 写像であるから,  $f|_Y$  は  $\Phi_{b_P}$  以上の複雑さを持つと言える. このような擬アノソフ型の不変集合によって強制される複雑さは topological chaos とよばれている [3].

Topological chaos は, 位相的な障害 (つまり, ある不変集合から決まる組みひもの型) によって決まる複雑さであるから, システム (あるいは写像) に依存しないユニバーサルな複雑さであることが重要な点である.

## 5.2 Topological chaos

### 5.2.1 操作 $p(1)n(2)$ による混合と topological chaos

Section 3 で考察した 2 つの操作  $p(1)n(2)$  および  $p(1)p(2)$  と組みひもの関連について考察する. 操作  $p(1)$  によって  $\bigcirc$  と  $\square$  の位置はちょうど入れ替わるが,  $\triangle$  はプロペラ  $P_1$  から ( $\bigcirc$  や  $\square$  と比べて) 離れた位置にあることから時間  $T$  の間に  $\triangle$  が動く距離を無視することにする. そのとき, 操作  $p(1)$  を行う間, 3 点  $\bigcirc, \square, \triangle$  が通った道を描くと 3-組みひも  $\sigma_1$  が得られる. 操作  $n(2)$  の場合も同様に考えると, この操作を行う間, 3 点  $\bigcirc, \square, \triangle$  が通った道を描くと 3-組みひも  $\sigma_2^{-1}$  が得られる. 従って, 操作  $p(1)n(2)$  における 3 点  $\bigcirc, \square, \triangle$  の動きは, 擬アノソフ型の組みひも  $\sigma_1\sigma_2^{-1}$  によって, 操作  $p(1)p(2)$  では周期型の組みひも  $\sigma_1\sigma_2$  によって表すことが出来る.

操作  $p(1)n(2)$  では Figure 2 で見たように渦糸付近には均一性の高い混合領域が達成できた. これは, 3 点  $\bigcirc, \square, \triangle$  の動きから決まる擬アノソフ組みひもが topological chaos を強制し, それによってこのような混合領域が達成されたと考えられる.

一方, 操作  $p(1)p(2)$  では Figure 4 で観察したように, 渦糸付近には不均一な混合領域が達成された. その理由としては, 周期型の組みひもには, 粒子の複雑さを強制することができないからと考えられる.

### 5.2.2 Boyland-Aref-Stremmer の実験

Section 5.2.1 で, 我々は  $p(1)n(2)$  における均一な粒子混合には, 擬アノソフ型の組みひも  $\sigma_1\sigma_2^{-1}$  による topological chaos が寄与していることを指摘した. Boyland-Aref-Stremmer は blinking vortex システムとは異なるシステムを用いて, 擬アノソフ型の組みひも  $\sigma_1\sigma_2^{-1}$  による topological chaos が寄与する粒子混合を実験で達成した [3]: Figure 12(左) のように粘性流体が入った水槽に 3 本の棒を差し込んだ装置を用意しそこに染料を流し, 棒を周期的に動かす次の操作 A, B を考える:

操作 A: 左にある棒と真ん中にある棒を反時計方向に入れ替える. 次に真ん中にある棒と右にある棒を時計方向に入れ替える.

操作 B: 左にある棒と真ん中にある棒を反時計方向に入れ替える. 次に真ん中にある棒と右にある棒を反時計方向に入れ替える.

操作 A, B それぞれを繰り返すことによってどのように染料が混ざるかについて考える. 流れは 2 次元的だと考えると, 円板上の点  $x$  に対して, 操作 A, あるいは B を行った後あとに写る点  $x'$  を対応させることによって, 操作 A, あるいは B は円板上の同相写像  $f_A, f_B$  をそれぞれ定義する. 実験の棒は同相写像  $f_A$  や  $f_B$  の 3 周期軌道に対応し, その組みひも型は操作 A については擬アノソフ型  $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ , 操作 B については周期型  $\sigma_1\sigma_2$  となる (Figure 12(右)). Boyland et al の実験結果 ([3,

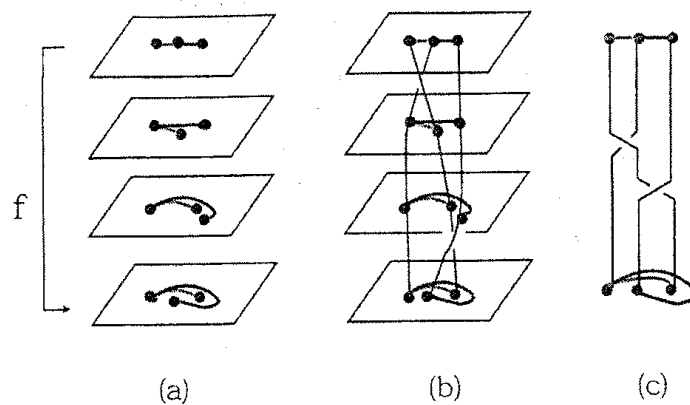


図 10: (a) 恒等写像と  $f$  を結ぶ連続変形. 黒丸は  $f$  の 3 周期軌道, (b)(c) 連続変形に従って周期軌道の軌跡を考えると組みひもが得られる.

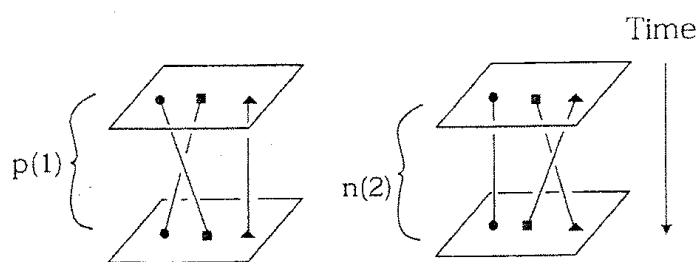


図 11:  $p(1)$  を行う間,  $\bigcirc, \square, \triangle$  の 3 点が通った道を描いて出来るひも (左).  $n(2)$  を行う間,  $\bigcirc, \square, \triangle$  の 3 点が通った道を描いて出来るひも (右).

Figure 2)) をみると, 操作 A では棒の周りには染料によって複雑な筋模様が形成されていて, 均一な混合が達成していると言える. この筋模様は,  $p(1)n(2)$  おいて我々が Figure 2 で観察したものと非常によく似ている. 一方操作 B では染料は全く混ざっていないことがわかる. これは, 棒の周期的な動きから定まる組みひも型が粒子混合に本質的に反映していることを示していると共に, topological chaos が (位相的な障害のみによって決まり) システムに依存しない複雑さであることを非常によく表した結果である.

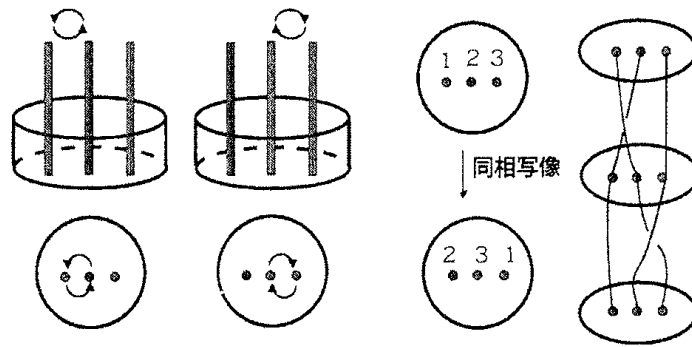


図 12: 操作 A による混合方法: (1) 左にある棒と真ん中にある棒を反時計方向に入れ替える. 次に (2) 真ん中にある棒と右にある棒を時計方向に入れ替える. 以降, (1)(2) を繰り返す. 操作 A の棒の動かし方から組みひも  $\sigma_1\sigma_2^{-1}$  が得られる.

## 6 まとめ

Blinking vortex システムにおいて渦糸を点滅させる時間や渦糸の強さの正負を適当に選んだ操作  $p(1)n(2)$  と  $p(1)p(2)$  の粒子混合について, 数値計算と組みひもを用いて考察を行った. 渦糸付近の粒子混合の本質的な性質は, 渦糸付近のある 3 点の軌道から定まる組みひも型が決定している: 操作  $p(1)n(2)$  には擬アノソフ型の組みひも  $\sigma_1\sigma_2^{-1}$  を対応させることが出来るが, 渦糸付近に達成される均一な混合領域は  $\sigma_1\sigma_2^{-1}$  による topological chaos が本質的に寄与している. 渦糸から離れた領域に存在する多くの粒子については, その軌道は渦糸付近をいずれ通過することから, 平面上のかなり広い領域について均一な粒子混合が達成できる.

一方で, 周期型の組みひもが対応する操作  $p(1)p(2)$  には, 渦糸付近には  $p(1)n(2)$  で観察されたような均一な混合領域は見られなかった. さらに渦糸を取り囲むような大きな島が存在することから, 平面上の広い領域に及ぶ粒子混合は達成できない.

## 参考文献

- [1] H. Aref, *Stirring by chaotic advection*, J. Fluid Mech. **143**, (1984) 1–21.
- [2] H. Aref, *The development of chaotic advection*, Phys. Fluids **14**, (2002) 1315–1325.
- [3] P. Boyland, H. Aref and M. Stremler, *Topological fluid mechanics of stirring*, J. Fluid Mech. **403**, (2000) 277–304.
- [4] P. Boyland. *Topological methods in surface dynamics*. Topology Appl. **58** (3), (1994) 223–298.
- [5] A. Casson and S. Bleiler, Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston, London Math. Soc. Stud. Texts **9**, Cambridge University Press (1988).
- [6] M. Handel, *Global shadowing of pseudo-Anosov homeomorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems **5** (3), (1985) 373–377.
- [7] E. Kin and T. Sakajo, *Efficient topological chaos embedded in the blinking vortex system*, to appear in Chaos (2005).
- [8] 河野 俊丈, 組みひもの数理, 遊星社
- [9] 松岡隆, 組みひもの理論と力学系, 物性研究 (1996)
- [10] M. Nitsche and R. Krasny, *A numerical study of vortex ring formation at the edge of a circular tube*, J. Fluid Mech. **276**, (1994) 139–161.
- [11] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Am. Math. Soc. **19** (2), (1988) 417–431.
- [12] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer (1982).